

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>   |
| <b>по дисциплине:</b>      | Алгебра и геометрия  |
| <b>по направлению:</b>     | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Управление инновациями в бизнесе<br>Физтех-школа бизнеса высоких технологий<br>кафедра высшей математики |
| <b>курс:</b>               | 1  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Экзамен

2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 60 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 6

Программу составил: С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.04.2022

## Аннотация

В курсе "Алгебра и геометрия" изучаются основы аналитической геометрии и линейной алгебры, а также смежных разделов алгебры.

В начальной части курса, посвящённой аналитической геометрии, вводятся основы матричной алгебры. Изучаются маломерные векторные пространства (плоскость, пространство), метод координат в плоскости и пространстве, основы векторной алгебры. Изучается аналитическая геометрия прямых и плоскостей, а также линий второго порядка.

Далее изучаются базовые свойства основных алгебраических структур (группы, кольца, поля). Обсуждаются понятия характеристики поля, простейшие примеры групп, понятие смежного класса, теорема Лагранжа для групп.

Развивается теория систем линейных уравнений, основы теории линейных пространств (базис, размерность, суммы и пересечения подпространств, двойственное пространство и связанные понятия). Вводятся понятия линейных отображения и преобразования, ядра и образа. Обсуждается перевод всех этих понятий на матричный язык.

Развивается теория определителей матриц над произвольным полем.

Вводится и изучается понятие многочлена над полем. Освещаются вопросы разложения на множители, формальной производной, корней и кратных корней многочлена.

Развивается теория линейного преобразования (оператора) линейного пространства. Изучаются инвариантные подпространства, собственные значения и собственные векторы, характеристический многочлен, вопросы, связанные с диагонализуемостью оператора. Далее доказывается теорема Гамильтона–Кэли, изучается жорданова нормальная форма. Раздел завершается приложениями жордановой нормальной формы, включающими изучением линейных рекуррент над произвольным полем и связанных вопросов.

Вводятся понятия билинейной/полуторалинейной формы, (косо)симметрической билинейной формы (эрмитовой), квадратичной формы, изучаются вопросы приведения матрицы такой формы к каноническому виду.

Вводится и изучается понятие евклидова (эрмитова) пространства, связанные с ним понятия (длина, ортогональная проекция, объём).

Изучаются линейные операторы и квадратичные формы на евклидовых пространствах, их приведение к каноническому виду. Описываются полярное и сингулярное разложение матрицы.

В завершение курса, вводится общее понятие тензора (как обобщения многих введённых ранее понятий), описываются основные свойства тензоров и тензорные операции.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Ознакомление слушателей с основами алгебры и геометрии и подготовка к изучению других математических курсов – дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, функционального анализа, аналитической механики, теоретической физики, методов оптимального управления и др.

### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области матричной алгебры, теории линейных пространств, теории групп, аналитической геометрии;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов аналитической геометрии и линейной алгебры в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции   |
|--|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи                           |
|  | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |

|   |   |
|---|---|
| применять системный подход для решения поставленных задач   | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки  |
|   | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки  |
| УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений | УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений |

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- определение вектора и операций с векторами (скалярное, векторное и смешанное произведение), их свойства и формулы, связанные с этими операциями;
- уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;
- свойства линий второго порядка;
- определение векторного пространства, их свойства и формулы;
- понятие ранга оператора;
- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.
- определения полугрупп, моноидов и групп;
- теорему Лагранжа о подгруппах в группе, теорему о строении подгрупп в циклических группах;
- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- определение и свойства наибольшего общего делителя в кольце многочленов; алгоритм Евклида для поиска наибольшего общего делителя;
- основную теорему алгебры о корнях многочленов над полем комплексных чисел;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
- определение и свойства жордановой нормальной формы; минимального многочлена;
- приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции, критерий Сильвестра;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.

уметь:

- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- применять векторную алгебру к решению геометрических и физических задач;
- решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;
- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты.
- находить численное решение системы линейных уравнений, исследовать системы линейных уравнений на совместность;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы;
- применять начальные понятия к решению несложных задач теории групп;
- находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов; выражать их через сами многочлены;
- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- находить численное решение системы линейных уравнений. находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
- приводить матрицу к жордановой нормальной форме; находить жорданов базис и подсчитывать количество жордановых клеток, отвечающих заданному собственному значению;
- вычислять характеристический и минимальный многочлены матрицы;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

владеть:

- общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
- ортогональной классификацией линий второго порядка.
- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).
- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- сведениями о применениях спектральных задач;
- свойствами многочленов и наибольшего общего множителя;
- понятием жордановой нормальной формы и умением приводить матрицы к ней;
- применениями квадратичных форм в геометрии и анализе;
- понятиями сопряженного и ортогонального преобразования;
- применениями евклидовой метрики в задачах геометрии и анализа, различными приложениями симметричной спектральной задачи;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины             | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. |          |                 |                |
|---|--------------------------------------|---|----------|-----------------|----------------|
|   |                                      | Лекции  | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Матрицы и системы линейных уравнений | 4   | 4        |                 | 7              |
| 2 | Векторная алгебра                    | 4   | 4        |                 | 6              |
| 3 | Метод координат                      | 4   | 4        |                 | 7              |

|                       |   |                     |    |  |    |
|-----------------------|---|---------------------|----|--|----|
| 4                     | Прямая и плоскость  | 4                   | 4  |  | 6  |
| 5                     | Линии и поверхности второго порядка                       | 5                   | 5  |  | 7  |
| 6                     | Линейное пространство                                     | 4                   | 4  |  | 6  |
| 7                     | Предварительные теоремы теории групп                      | 5                   | 5  |  | 6  |
| 8                     | Многочлены, их свойства                                   | 5                   | 5  |  | 8  |
| 9                     | Спектральные свойства матрицы                             | 5                   | 5  |  | 7  |
| 10                    | Жорданова нормальная форма                                | 5                   | 5  |  | 8  |
| 11                    | Билинейные и квадратичные формы                           | 5                   | 5  |  | 7  |
| 12                    | Евклидовы и унитарные пространства                        | 5                   | 5  |  | 8  |
| 13                    | Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах | 5                   | 5  |  | 7  |
| Итого часов           |   | 60                  | 60 |  | 90 |
| Подготовка к экзамену |   | 60 час.             |    |  |    |
| Общая трудоёмкость    |   | 270 час., 6 зач.ед. |    |  |    |

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 1 (Осенний)

#### 1. Матрицы и системы линейных уравнений

1.1. Матрицы. Операции сложения и умножения матриц на числа. Определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

1.2. Умножение и обращение матриц. Элементарные преобразования матриц.

1.3. Определение и основные свойства детерминантов. Миноры, алгебраические дополнения, разложение детерминанта по элементам строки или столбца. Формула полного разложения детерминанта и ее следствия. Детерминант произведения матриц.

1.4. Решение систем линейных уравнений по методу Крамера. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

1.5. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера—Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса.

#### 2. Векторная алгебра

2.1. Направленные отрезки и действия над ними. Операции сложения направленных отрезков и умножения их на числа. Их свойства. Векторное пространство. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность операций с векторами.

2.2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис, координаты векторов в базисе. Координатное представление векторов. Операции с векторами в координатном представлении. Изменение координат вектора при замене базиса. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов в координатной форме.

2.3. Ориентированные тройки векторов. Векторное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном базисе. Геометрический смысл векторного произведения. Выражение векторного произведения в произвольном базисе.

2.4. Смешанное произведение векторов, его свойства, выражение в произвольном и ортонормированном базисах. Геометрический смысл смешанного произведения. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения.

#### 3. Метод координат

3.1. Общая декартова и прямоугольная системы координат. Изменение координат точки при замене системы координат. Матрица перехода и ее свойства. Формулы перехода между прямоугольными системами координат на плоскости. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. Формулы перехода между ними и прямоугольной системой координат.

3.2. Ортогональные проекции векторов и их свойства. Скалярное произведение, его свойства, выражение в координатах. Формулы для определения расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями.

3.3. Координатное задание линий на плоскости, поверхностей в пространстве. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка алгебраических линий на плоскости при замене декартовой системы координат. Координатное задание линий в пространстве. Инвариантность порядка алгебраических линий и поверхностей в пространстве при замене декартовой системы координат. Координатное задание фигур на плоскости и тел в пространстве.

#### 4. Прямая и плоскость

4.1. Прямая на плоскости и в пространстве. Векторные и координатные способы задания прямой на плоскости и в пространстве. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Позиционные и метрические задачи о прямых и плоскостях в пространстве. Перевод одной формы описания прямых и плоскостей в пространстве в другую форму. Линейные неравенства.

#### 5. Линии и поверхности второго порядка

5.1. Алгебраические линии 2-го порядка на плоскости. Их ортогональная классификация. Приведение уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду. Центральные линии. Сопряженные диаметры. Асимптотические направления. Инварианты.

5.2. Эллипс, гипербола и парабола. Их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе.

5.3. Типы поверхностей второго порядка и их свойства.

5.4. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

#### 6. Линейное пространство

6.1. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис. Подпространства и линейные оболочки в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств.

6.2. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Координатная форма необходимого и достаточного условия линейной зависимости элементов.

6.3. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и ее свойства. Координатная форма задания подпространств и гиперплоскостей.

6.4. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений.

#### 7. Предварительные теоремы теории групп

8.1. Понятие группы, кольца и поля. Порядок элемента. Циклические группы, их подгруппы. Теорема Лагранжа и ее следствия. Характеристика поля.

## 8. Многочлены, их свойства

8.1. Кольцо многочленов над полем. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида, линейное выражение НОД.

8.2. Основная теорема алгебры для многочленов.

8.3. Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни.

## 9. Спектральные свойства матрицы

9.1. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. След преобразования.

9.2. Инвариантные подпространства малой размерности в комплексном и вещественном случаях.

9.3. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализируемости преобразования.

## 10. Жорданова нормальная форма

10.1. Приведение матрицы преобразования к треугольному виду. Теорема Гамильтона—Кэли.

10.2. Формулировка теоремы о жордановой нормальной форме. Сведение доказательства существования к случаю одного собственного значения.

10.3. Существование жордановой нормальной формы в случае одного собственного значения.

10.4. Единственность жордановой нормальной формы. Метод ее нахождения без поиска жорданова базиса.

## 11. Билинейные и квадратичные формы

11.1. Билинейные формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и ее изменение при замене базиса. Симметричные билинейные формы.

11.2. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

11.3. Индексы инерции квадратичной формы. Закон инерции.

11.4. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

## 12. Евклидовы и унитарные пространства

12.1. Евклидово пространство. Выражение скалярного произведения в координатах. Свойства матрицы Грама. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.

12.2. Процесс ортогонализации Грама—Шмидта. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Изоморфизм евклидовых пространств.

12.3. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование.

## 13. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

13.1. Преобразование, сопряженное данному. Его существование и единственность, его свойства.

13.2. Самосопряженное линейное преобразование. Свойства самосопряженных преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного линейного преобразования.

13.3. Ортогональные преобразования и их свойства. Канонический вид ортогонального преобразования.

13.4. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.

13.5. Приведение квадратичной формы к главным осям.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 10-е изд., испр. — М. : Физматлит., 2003, 2004, 2005 .— 304 с.
2. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 .— 496 с.
3. Курс алгебры [Текст] : [учебник для вузов] / Э. Б. Винберг .— 2-е изд., стереотип. — М : МЦНМО, 2013 .— 592 с.
4. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 272 с.
5. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 2 : Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 368 с.

### Дополнительная литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 272 с.
2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 298 с.
3. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ, 2000 .— 260 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.math.mipt.ru>

<http://lib.mipt.ru>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.



**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

|                            |  |
|----------------------------|--|
| <b>по направлению:</b>     | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Управление инновациями в бизнесе<br>Физтех-школа бизнеса высоких технологий<br>кафедра высшей математики |
| <b>курс:</b>               | <u>1</u>   |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Экзамен
- 2 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции  | Индикаторы достижения компетенции   |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач   | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи   |
|   | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи   |
|   | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки  |
|   | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки  |
| УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений | УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений |

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебра и геометрия» обучающийся должен:

### знать:

- определение вектора и операций с векторами (скалярное, векторное и смешанное произведение), их свойства и формулы, связанные с этими операциями;
- уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;
- свойства линий второго порядка;
- определение векторного пространства, их свойства и формулы;
- понятие ранга оператора;
- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.
- определения полугрупп, моноидов и групп;
- теорему Лагранжа о подгруппах в группе, теорему о строении подгрупп в циклических группах;
- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- определение и свойства наибольшего общего делителя в кольце многочленов; алгоритм Евклида для поиска наибольшего общего делителя;
- основную теорему алгебры о корнях многочленов над полем комплексных чисел;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
- определение и свойства жордановой нормальной формы; минимального многочлена;
- приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции, критерий Сильвестра;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.

### уметь:

- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- применять векторную алгебру к решению геометрических и физических задач;
- решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;
- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты.
- находить численное решение системы линейных уравнений, исследовать системы линейных уравнений на совместность;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы;
- применять начальные понятия к решению несложных задач теории групп;
- находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов; выражать их через сами многочлены;
- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- находить численное решение системы линейных уравнений. находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
- приводить матрицу к жордановой нормальной форме; находить жорданов базис и подсчитывать количество жордановых клеток, отвечающих заданному собственному значению;
- вычислять характеристический и минимальный многочлены матрицы;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

**владеть:**

- общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
- ортогональной классификацией линий второго порядка.
- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).
- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- сведениями о применениях спектральных задач;
- свойствами многочленов и наибольшего общего множителя;
- понятием жордановой нормальной формы и умением приводить матрицы к ней;
- применениями квадратичных форм в геометрии и анализе;
- понятиями сопряженного и ортогонального преобразования;
- применениями евклидовой метрики в задачах геометрии и анализа, различными приложениями симметричной спектральной задачи;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы, отражаются в электронной системе контроля и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

\*Прикрепляется БРС по изучаемому предмету.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Вычислите. Являются ли строки этого определителя линейно зависимыми? Если да, укажите эту линейную зависимость.
2. В треугольнике ABC медианы АВ и ВК пересекаются в точке О. Найдите координаты векторов АМ и ВО в базисе СА, СВ.
3. Запишите уравнение прямой  $[r, \vec{a}] = b$  в векторно-параметрическом виде.
4. Укажите какой-нибудь нормальный вектор прямой на плоскости, имеющей в прямоугольной системе координат угловой коэффициент К.
5. Является ли кривая, заданная уравнением  $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y = 0$ , центральной? Найдите координаты ее центра. Определите тип кривой.
6. Пусть А и В – две квадратные матрицы одного размера. Обязаны ли совпадать ранги матриц АВ и ВА?
7. Запишите общее решение уравнения  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  в виде суммы частного решения и произвольной линейной комбинации фундаментальной системы решений.
8. Образует ли линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на число:
  - а) множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a, b]$ ;
  - б) множество функций, определенных на  $[a, b]$  и таких, что  $f(a) = 0$ .

Примеры экзаменационных билетов (Осень):

Билет №1

1. Вычислите. Являются ли строки этого определителя линейно зависимыми? Если да, укажите эту линейную зависимость.
2. В треугольнике ABC медианы АВ и ВК пересекаются в точке О. Найдите координаты векторов АМ и ВО в базисе СА, СВ.

Билет №2

1. Запишите уравнение прямой  $[r, \vec{a}] = b$  в векторно-параметрическом виде.
2. Укажите какой-нибудь нормальный вектор прямой на плоскости, имеющей в прямоугольной системе координат

Примеры экзаменационных билетов (Весна):

Билет №1

1. В треугольнике ABC медианы АВ и ВК пересекаются в точке О. Найдите координаты векторов АМ и ВО в базисе СА, СВ.
2. Укажите какой-нибудь нормальный вектор прямой на плоскости, имеющей в прямоугольной системе координат угловой коэффициент К.

Билет №2

1. Запишите уравнение прямой  $[r, \vec{a}] = b$  в векторно-параметрическом виде.
2. Образует ли линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на число:
  - а) множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a, b]$ ;
  - б) множество функций, определенных на  $[a, b]$  и таких, что  $f(a) = 0$ .

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

## Балльно-рейтинговая система оценки

**знаний** Дисциплина: «Алгебра и геометрия», 1 курс, (1-2) семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

| №  | Виды занятий                              | Сумма баллов   |
|----|---|----------------|
| 1. | Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания | 0 — 6          |
| 2. | Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания | 0 — 6          |
| 3. | Контрольная работа № 3 по сдаче 3 задания | 0 — 6          |
| 4. | Задание № 1                               | 0 — 2          |
| 5. | Задание № 2                               | 0 — 2          |
| 6. | Задание № 3                               | 0 — 2          |
| 7. | Проверка теоретических знаний             | 0 — 3          |
| 8. | Работа на семинарах                       | 0 — 3          |
| 9. | Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ) | 0 — 70         |
|    | <b>ИТОГО</b>                              | <b>0 — 100</b> |

**Результативная работа на практикуме 0 — 3 балла.** Если при учете этого вида работы итоговая сумма за работу в семестре превосходит 30 баллов, то считать ее равной 30 баллам.

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N \cdot 7$ , где  $N > 2$  — предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N = 1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системе.

| Баллы БРС | Оценки |                     |
|-----------|--------|---------------------|
| 93 — 100  | 10     | отлично             |
| 86 — 92   | 9      |                     |
| 79 — 85   | 8      |                     |
| 72 — 78   | 7      | хорошо              |
| 65 — 71   | 6      |                     |
| 58 — 64   | 5      |                     |
| 51 — 57   | 4      | удовлетворительно   |
| 44 — 50   | 3      |                     |
| 30 — 43   | 2      | неудовлетворительно |
| 0 — 29    | 1      |                     |

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав.кафедрой высшей математики \_\_\_\_\_ Г.Е. Иванов